УДК 517.95

НЕЛИНЕЙНАЯ УПРАВЛЯЕМАЯ ЗАДАЧА ГУРСА-ДАРБУ: УСЛОВИЯ СОХРАНЕНИЯ РАЗРЕШИМОСТИ «В ЦЕЛОМ» [1]

© **И. В. Лисаченко, В. И. Сумин**

Ключевые слова: нелинейная управляемая задача Гурса-Дарбу; условия сохранения глобальной разрешимости.

Аннотация: Рассматривается управляемая нелинейная задача Гурса-Дарбу общего вида в случае, когда ее решение естественно искать в классе функций с суммируемой в степени $p > 1$ смешанной производной; обсуждаются достаточные условия сохранения глобальной разрешимости задачи при возмущении управления.

Рассмотрим управляемую задачу Гурса-Дарбу

$$x''_{t_1 t_2}(t) = g(t, x(t), x'_{t_1}(t), x'_{t_2}(t), u(t)), t \equiv \{t_1, t_2\} \in \Pi \equiv [0,1]^2, \tag{1}$$

$$x(t_1, 0) = \varphi_1(t_1),\ t_1 \in [0,1];\ x(0, t_2) = \varphi_2(t_2),\ t_2 \in [0,1], \tag{2}$$

где $g(t, l_0, l_1, l_2, v) \equiv g(t, l, v) \colon \Pi \times \mathbf{R}^{3n} \times \mathbf{R}^m \to \mathbf{R}^n$ $(l = \{l_0, l_1, l_2\})$ и $\varphi_i(t_i) \colon [0,1] \to \mathbf{R}^n$, $i = 1,2$ заданы, $u(t) \colon \Pi \to \mathbf{R}^m$ — управление ($\mathbf{R}^n$ — пространство n-векторов-столбцов; если $a, b, c \in \mathbf{R}^n$, то $\{a, b, c\}$ — вектор-столбец из $\mathbf{R}^{3n}$). Задача (1), начиная с 1960-х годов, занимает особое место в математической теории оптимального управления распределенными системами, являясь ее своего рода «пробным камнем» (см., например, [1, с. 333-345, с. 449-450], [2, с. 591-595], [3, с. 442-450]). Именно для этой задачи были в свое время найдены первые достаточно общие условия *устойчивости* (по возмущению управления) *существования глобальных решений* (УСГР) нелинейных распределенных систем [4]; история вопроса кратко изложена в [5]. Проблема УСГР неизбежно возникает в различных разделах теории оптимального управления (см., например, [5], [6, с. 12-14]).

В [4] рассматривались абсолютно непрерывные решения задачи Гурса-Дарбу с ограниченными смешанной и первыми частными производными (более общие условия УСГР в этом случае были затем получены в [7], [6, с. 68-70]). В последние годы наблюдается устойчивый интерес (см., например, [8, 9]) к задачам оптимизации систем типа Гурса-Дарбу, рассматриваемых в классах функций с суммируемыми в некоторой степени p смешанной и первыми производными (такие классы будем обозначать AC_p); первые теоремы УСГР здесь получены в [10, 11] (о результатах [4, 6, 7] и [10, 11] см. также [12]). Отметим, что этот случай, в отличие от преимущественно изучавшегося до недавнего времени случая решений с ограниченными производными, многовариантен — он допускает различные естественные варианты условий на задачу (1), (2), отличающиеся друг от друга используемой в них априорной информацией о предполагаемом решении (каждому из этих вариантов отвечают, вообще говоря, свои условия УСГР; получение этих условий в случае решений с суммируемыми в некоторой степени смешанной и первыми производными оказывается технически более сложным (и это связано с существом дела), чем в случае ограниченных производных). Так, в [10, 11] рассматривались варианты условий, грубые в том смысле, что в них учитывается лишь вытекающая непосредственно из определения класса AC_p принадлежность смешанной и первых производных решения этого класса пространству L_p. Однако первые

[1]Финансовая поддержка РФФИ (грант 07-01-00495) и аналитической целевой ведомственной программы "Развитие научного потенциала высшей школы (2009-2010)" Минобрнауки РФ (регистр. номер 2.1.1/3927).

частные производные такого решения принадлежат существенно более узким, чем L_p «лебеговым пространствам со смешанной нормой» (см. ниже). Вариант условий УСГР управляемой задачи Гурса-Дарбу с учетом этой, в определенном смысле полной, априорной информации о решении класса AC_p, приведен в [13]. В докладе дается обзор полученных авторами доклада подобного рода результатов. Приведем пример.

Считаем: g дифференцируема по l при каждом v для почти всех t, а вместе с производной g'_l измерима по t при любых $\{l,v\}$ и непрерывна по $\{l,v\}$ для почти каждого t; φ_i абсолютно непрерывна, $\varphi'_i \in L^n_p[0,1]$ при заданном $p \in (1,\infty)$, $i = 1,2$, $\varphi_1(0) = \varphi_2(0) = 0$; допустимы управления из некоторого $D \subset L^m_s \equiv L^m_s(\Pi)$, $s \in [1,\infty]$. Пусть: $f(t,l,v) \equiv g(t, l_0 + \varphi_1(t_1) + {}+ \varphi_2(t_2), l_1 + \varphi'_1(t_1), l_2 + \varphi'_2(t_2), v)$; $L_{q(j)}$ — пространство $L_q[0,1]$ функций переменной t_j, $j \in \{1,2\}$, $q \in [1,\infty]$; $L_{q(j),r(i)}$ — пространство функций $z(t)$, $t \in \Pi$ со смешанной нормой $\|z\|_{q(j),r(i)} \equiv \big\| \|z(t_1,t_2)\|_{L_{q(j)}} \big\|_{L_{r(i)}}$ $(i,j \in \{1,2\},\ i \neq j;\ q,r \in [1,\infty])$. Положим $\mathfrak{M} \equiv L^n_\infty \times L^n_{\infty(2),p(1)} \times L^n_{\infty(1),p(2)}$, $\mathfrak{N} \equiv L^{n\times n}_p \times L^{n\times n}_{p(2),\infty(1)} \times L^{n\times n}_{p(1),\infty(2)}$ ($X^{n\times n}$ — пространство $(n\times n)$ - матриц-функций, составленных из функций пространства X).

Пусть g такова, что формулы $F[y,u](t) \equiv f(t,y(t),u(t))$, $\Phi[y,u](t) \equiv f'_l(t,y(t),u(t))$ определяют оператор $F[\cdot,\cdot]\colon \mathfrak{M} \times D \to L^n_p$ и ограниченный оператор $\Phi[\cdot,\cdot]\colon\ \mathfrak{M} \times D \to \mathfrak{N}$. Тогда естественно рассматривать решения (1),(2) из класса AC^n_p. Каждому $u \in D$ может отвечать не более одного такого решения. Введем обозначения: $\Omega \equiv \{u(\cdot) \in D : u(\cdot)$ отвечает глобальное решение из $AC^n_p\}$; $A_0[z](t) \equiv \int_0^{t_1}\int_0^{t_2} z(\xi_1,\xi_2)d\xi_1 d\xi_2$, $A_1[z](t) \equiv \int_0^{t_2} z(t_1,\xi)d\xi$, $A_2[z](t) \equiv {}$ $\equiv \int_0^{t_1} z(\xi,t_2)d\xi$, $A[z]\,(t) \equiv \{A_0[z]\,(t)\,, A_1[z]\,(t)\,, A_2[z]\,(t)\}$, $t \in \Pi$, $z \in L^n_p$; $J\,[x]\,(t) \equiv \{x\,(t)\,, x'_{t_1}\,(t)\,, x'_{t_2}\,(t)\}$, $t \in \Pi$, $x \in AC^n_p$. Для $u \in D$, $u_0 \in \Omega$ положим $r(u,u_0) \equiv \|A[\Delta_u g]\|_{\mathfrak{M}}$, где $\Delta_u g(\cdot) \equiv$ $\equiv g(\cdot, x_0(\cdot), x'_{0t_1}(\cdot), x'_{0t_2}(\cdot), u(\cdot)) - g(\cdot, x_0(\cdot), x'_{0t_1}(\cdot), x'_{0t_2}(\cdot), u_0(\cdot))$, $x_0 \in AC^n_p$ — глобальное решение, отвечающее u_0.

Т е о р е м а. *Пусть фиксированы* $u_0 \in \Omega$, $d_0 > 0$. *Тогда: найдется* $\delta > 0$ *такое, что если* $u \in D$, $\|u - u_0\|_{L^m_s} < d_0$, $r(u,u_0) < \delta$, *то* $u \in \Omega$; *для любого* $M_0 > 0$ *существует* $C > 0$ *такое, что если* $x \in AC^n_p$ *— отвечающее* $u \in \Omega$ *глобальное решение, причем* $\|u - u_0\|_{L^m_s} < d_0$, $\|J\,[x - x_0]\|_{\mathfrak{M}} \leqslant$ $\leqslant M_0$, *то* $\|J\,[x - x_0]\|_{\mathfrak{M}} \leqslant Cr(u,u_0)$, $\|(x - x_0)''_{t_1t_2}\|_{L^n_p} \leqslant C\|\Delta_u g\|_{L^n_p}$.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Лурье К.А.* Оптимальное управление в задачах математической физики. М.: Наука, 1975.

2. *Васильев Ф.П.* Методы оптимизации. М.: Факториал, 2002.

3. *Егоров А.И.* Основы теории управления. М.: Физматлит, 2004.

4. *Плотников В.И.*, *Сумин В.И.* Проблемы устойчивости нелинейных систем Гурса-Дарбу // Дифференц. уравнения. 1972. Т. 8. №5. С. 845-856.

5. *Сумин В.И.* Проблема устойчивости существования глобальных решений управляемых краевых задач и вольтерровы функциональные уравнения // Вестник ННГУ. Математика. Н. Новгород, 2003. Вып. 1. С. 91-108.

6. *Сумин В.И.* Функциональные вольтерровы уравнения в теории оптимального управления распределенными системами. Н. Новгород: Изд-во ННГУ, 1992.

7. *Сумин В.И.* Функционально-операторные уравнения Вольтерра и устойчивость существования глобальных решений краевых задач // Украинский матем. журн. 1991. Т. 43. №4. С. 555-561.

8. *Толстоногов А.А.* Теорема существования оптимального управления в задаче Гурса-Дарбу без предположения выпуклости // Изв. РАН. Сер. матем. 2000. Т. 64. №4. С. 163-182.

9. *Погодаев Н.И.* О свойствах решений задачи Гурса-Дарбу с граничными и распределенными управлениями // Сибирский матем. журн. 2007. Т. 48. №5. С. 1116-1133.

10. *Лисаченко И.В.*, *Сумин В.И.* Управляемая задача Гурса-Дарбу в классах функций с суммируемой смешанной производной. I; II // Вестн. ННГУ. Математика. Н. Новгород, 2005. Вып. 1 (3). С. 88-101; 2006. Вып. 1 (4). С. 65-80.

11. *Лисаченко И.В.*, *Сумин В.И.* Об условиях устойчивости существования глобальных решений управляемой задачи Гурса-Дарбу // Вестн. ННГУ. Математическое моделирование и оптимальное управление. Н. Новгород,

2006. Вып. 2 (31). С. 64-81.

12. *Лисаченко И.В., Сумин В.И.* Об управляемой задаче Гурса-Дарбу в классах функций с суммируемой смешанной производной // Вестн. Тамб. ун-та. Сер. Естеств. и техн. науки. Тамбов, 2007. Т. 12. Вып.4. С. 477-479.

13. *Лисаченко И.В.* Нелинейная задача Гурса-Дарбу с возмущаемыми правой частью и граничными функциями // Вестн. ННГУ. Н. Новгород, 2008. №5. С. 107-112.

Abstract: the nonlinear controllable Goursat-Darboux problem is considered. The case when a mixed derivative of the solution is L_p-function ($p > 1$)is considered; the sufficient conditions of existence-stability of global solutions with respect to perturbations of controls is discussed.

Keywords: nonlinear controllable Goursat-Darboux problem; conditions of existence-stability of global solutions.

Лисаченко Ирина Владимировна
Нижегородский государственный
технический университет
Россия, Нижний Новгород
e-mail: i_lisach@mail.ru

Irina Lisachenko
Nizhniy Novgorod State
Technical University
Russia, Nizhniy Novgorod
e-mail: i_lisach@mail.ru

Сумин Владимир Иосифович
д. ф.-м. н., профессор
Нижегородский государственный университет
Россия, Нижний Новгород
e-mail: v_sumin@mail.ru

Vladimir Sumin
doctor of phys.-math. sciences, professor
Nizhniy Novgorod State University
Russia, Nizhniy Novgorod
e-mail: chavnn@mail.ru

УДК 517.911.5

О ПРИМЕНЕНИИ МЕТОДА ИНТЕГРАЛЬНЫХ НАПРАВЛЯЮЩИХ ФУНКЦИЙ К ЗАДАЧЕ О БИФУРКАЦИИ ПЕРИОДИЧЕСКИХ РЕШЕНИЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ВКЛЮЧЕНИЙ

© Н. В. Лой

Ключевые слова: глобальная бифуркация; направляющая функция; дифференциальное включение первого порядка; периодическое решение.

Аннотация: В данной работе, применяя метод интегральных направляющих функций, мы изучаем глобальную структуру множества периодических решений однопараметрического семейства дифференциальных включений первого порядка.

Обозначим через W_2^1 пространство всех функций $x\colon [0,T] \to \mathbb{R}^n$, первые производные которых существуют почти всюду на $[0,T]$ и являются элементами пространства $L_2([0,T];\mathbb{R}^n)$ с нормой

$$\|x\|_W = \|x\|_2 + \|x'\|_2,$$

где

$$\|x\|_2 = \left(\int_0^T \|f(s)\|^2_{\mathbb{R}^n}\, ds \right)^{\frac{1}{2}}.$$